Απειροστικός 2 28/03/2019

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής $\Rightarrow$ f: φραγμένη

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, A φραγμένο κ' f ομ. συνεχής $\Rightarrow$ η f είναι φραγμένη

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Αν το A όχι φραγμένο η Πρόταση δεν ισχύει
π.χ $A=\mathbb{R}$, $f(x)=x$

<u>Αποδ</u>: Έστω ότι δεν είναι φραγμένη. Άρα, $\exists \{z_n\}$ από το A, τ.ω $f(z_n)\to\pm\infty$. Όμως το A είναι φραγμένο $\Rightarrow \{z_n\}$ φραγμένη $\xrightarrow{B-W}$ $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $\exists \{z_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{z_n\}$ τ.ω $z_{k_n}\to x_0$

$\{z_{k_n}$ συγκλίνει$\}$ $\xrightarrow[\text{Θεώρημα } f \text{ ομ. συνεχής}]{}$ $f(z_{k_n})$ συγκλίνει, Άτοπο επειδή η $f(z_{k_n})\to\pm\infty$ εξ αρχα. που παει $f(z_n)\to\pm\infty$

<u>Φυλλάδιο 2 η ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

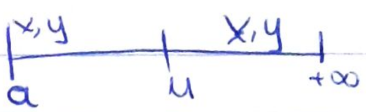
$f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, ~~ομ.~~ συνεχής τ.ω $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Νδο f ομ. συνεχής

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ (ομοίως $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$) συνεχής, τ.ω $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$)
Τότε f ομ. συνεχής

<u>Αποδ</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητούμε $\overset{\delta(\varepsilon)}{\delta}>0$, τ.ω $\forall x,y\in[a,\infty)$ τ.ω $|x-y|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell \Rightarrow \exists M>0$ τ.ω $\forall x>M$, $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

① • Έστω $x,y>M \Rightarrow |f(x)-f(y)|=|(f(x)-\ell)-(f(y)-\ell)|\leq$
$\leq |f(x)-\ell|+|f(y)-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$



(2)
- f ομ. συνεχής στο $[\alpha, M]$
$\Rightarrow \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ τω $\forall x, y \in [\alpha, M]$, με $|x-y| < \delta$ να ισχυει
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(3)
- f ομ. συνεχής στο $[\alpha, 2M]$
$\Rightarrow \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ τω $\forall x, y \in [\alpha, 2M]$ με $|x-y| < \delta_2$ να ισχυει
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Για $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, M\}$ Εστω $x, y \in [\alpha, +\infty)$ με $|x-y| < \delta$
υποθετω οτι $y > x$
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $x, y \in (M, +\infty) \xRightarrow{(1)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $x, y \in [\alpha, M] \Rightarrow |x-y| < \delta_1 \xRightarrow{(2)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: $x \in [\alpha, M]$, $y \in (M, \infty) \Rightarrow x, y \in [\alpha, 2M] \xRightarrow[(3)]{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 1:</u> Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τω $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$
τοτε f ομ. συνεχής
<u>Αποδ</u> Απο πρόταση, f ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$
κ' ομ. συνεχής στο $[0, +\infty) \Rightarrow f$ ομ. συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 2:</u> Εστω $f: I \to \mathbb{R}$, I διαστημα, συνεχής
i) Αν I φραγμένο, τοτε f ομ. συνεχής αν-αν υπάρχουν
τα πλευρικά όρια στα άκρα του I
ii) Αν I φραγμένο, τοτε αν υπάρχουν τα όρια στα άκρα,
τοτε f ομ. συνεχής (το αντίστροφο δεν ισχυει)

1. α) $f(x) = e^x$, $x \in (-\infty, 3]$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ομ. συνεχής

<u>Παράδειγμα:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$ (f φραγμένη, Lipschitz
($|f'(x)| = |\sin x| \leq 1$) $\Rightarrow f$ ομ. συνεχής αλλά $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$ δεν
υπάρχει
- $f: A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής κ' A φραγμένο $\Rightarrow f$ φραγμένη

Αν A φραγμένο, f συνεχής κ' φραγμένη $\nRightarrow$ f ομ. συνεχής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $f(x) = \sin 1/x \quad , x \in (0,1)$
f δεν είναι ομ. συνεχής
Απόδειξη: Έστω $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$
$x_n - y_n \to 0$ Αλλά $\sin\dfrac{1}{x_n} - \sin\dfrac{1}{y_n} = 0 - 1 = -1 \Rightarrow$

$-1 \neq 0 \Rightarrow f$ όχι ομ. συνεχής

2ος ΤΡΟΠΟΣ Αρκεί νδο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$

Έστω $\underset{\downarrow \atop 0}{x_n} = \dfrac{1}{2\pi n}$, $\underset{\downarrow \atop 0}{y_n} = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής
$\Rightarrow g \circ f$ ομ. συνεχής

οποτεδήποτε ορίζεται η σύνθεση δύο ομ. συνεχών συναρτήσεων τότε και η σύνθεσή τους είναι ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω $\forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|g\circ f(x) - g\circ f(y)| < \varepsilon$

- g ομ. συνεχής : $\exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, τ.ω $\forall z, w \in B$ με $|z - w| < \delta$ να ισχύει $|g(z) - g(w)| < \varepsilon$
- f ομ. συνεχής : $\exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ τ.ω $\forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta_2$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \delta_1$

$\Rightarrow \forall x, y \in A$, με $|x-y| < \delta_2$, ισχύει $|g(f(x)) - g(f(y))| < \varepsilon$

2ος ΤΡΟΠΟΣ: Έστω $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ακολουθίες από το A
τ.ω $x_n - y_n \to 0 \xrightarrow{f \text{ ομ. συνεχής}} f(x_n) - f(y_n) \to 0$

$\xrightarrow{g \text{ ομ. συνεχής}}$ $g(f(x_n)) - g(f(y_n)) \to 0$

$$\underset{\displaystyle (g\circ f)(x_n)}{\overset{\shortparallel}{g(f(x_n))}} - \underset{\displaystyle (g\circ f)(y_n)}{\overset{\shortparallel}{g(f(y_n))}} \to 0$$

$\Rightarrow g\circ f$ ομ. συνεχής

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχείς συναρτήσεις, $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

i) $f+g$ ομ. συνεχής $\Big\}\Rightarrow (\lambda f + \underset{\underset{\mathbb{R}}{\uparrow}}{\mu} g)$ ομ. συνεχής

ii) λf ομ. συνεχής

iii) Αν f, g φραγμένες $\Rightarrow f \cdot g$ ομ. συνεχής

iv) <u>Αν $\exists\, c > 0$ τ.ω. $f(x) \geq c$</u> $\forall x \in A \Rightarrow \frac{1}{f}$ ομ. συνεχής

π.χ. $f(x) = x$, $x \in (0, 1]$

<u>Απόδειξη</u>: (i)(ii) Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ από το A $\xrightarrow{f \text{ ομ. συνεχής}}$
$f(x_n) - f(y_n) \to 0$ $\hookrightarrow x_n - y_n \to 0$

κ'

$g(x_n) - g(y_n) \to 0$

$\Rightarrow (f+g)(x_n) - (f+g)(y_n) \to 0$ κ' $\lambda f(x_n) \to 0$

$\Rightarrow f+g$, λf ομ. συνεχής

iii) $\exists\, M, N > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq N$ $\forall x \in A$
Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ από το A τ.ω. $x_n - y_n \to 0$

Αρκεί νδο $f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n) \to 0$

$|f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n)| = |f(x_n)g(x_n) - f(x_n)g(y_n)$
$+ f(x_n)g(y_n) - f(y_n)g(y_n)| \leq |f(x_n)(g(x_n) - g(y_n))|$
$+ |g(y_n)(f(x_n) - f(y_n))|$

$\leq M|g(x_n) - g(y_n)| + N|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$